1. იპოვეთ მთელი დადებითი რიცხვებისგან შედგენილი ყველა ისეთი სამეული (x, y, z), რომ $x \le y \le z$ და $x^3(y^3+z^3) = 2012(xyz+2)$.

ამოხსნა

ვინაიდან $x^3(y^3+z^3) - 2012 \cdot xyz = 2012 \cdot 2$, ამიტომ ცხადია, რომ x ყოფს $2012 \cdot 2 = 2^3 \cdot 503$. თუ $503|x$ მაშინ თავდაპირველი განტოლების მარცხენა მხარე იყოფა 503^3-ზე, ანუ მარჯვენა მხარეც იყოფა 503^3-ზე, და ამიტომ $503^2|(xyz+2)$. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან $503|x$. ამრი-გად, $x = 2^m$, სადაც $m \in \{0,1,2,3\}$. თუ $m \ge 2$, მაშინ $2^6|x^3(y^3+z^3) - 2012 \cdot xyz = 2012 \cdot 2 = 2^3 \cdot 503$, რაც შეუძლებელია. ამრიგად, $x = 1$ ან $x = 2$ და ვღებულობთ:

$$y^3 + z^3 = 2012(yz+2) \qquad (1)$$

ან

$$y^3 + z^3 = 503(yz+1)\,. \qquad (2)$$

ორივე შემთხვევაში, მარტივი რიცხვი $503 = 3 \cdot 167 + 2$ ყოფს $y^3 + z^3$. ვაჩვენოთ, რომ $503|(y+z)$. მართლაც, ეს დებულება ცხადია თუ $503|y$, რადგანაც ამ შემთხვევაში $503|(y+z)$. ამრიგად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა 503 არ ყოფს y-ს და 503 არ ყოფს z-ს. მაშინ ფერმას მცირე თეორემის თანახმად $y^{502} \equiv z^{502} (mod 503)$. მეორე მხრივ , რადგანაც $y^3 \equiv -z^3 (mod 503)$, ამიტომ $y^{3 \cdot 167} \equiv -z^{3 \cdot 167} (mod 503)$, ე.ი. $y^{501} \equiv -z^{501} (mod 503)$ და ვღებულობთ $y \equiv -z (mod 503)$, რისი ჩვენებაც გვინდოდა.

ამრიგად, $y + z = 503 \cdot k$, სადაც $k \ge 1$. გამოვიყენოთ $y^3+z^3 = (y+z)((y-z)^2+yz)$ იგივეობა და გადავწეროთ ზემოთ მიღებული (1) და (2) განტოლებები შემდეგნაირად:

$$k(y-z)^2 + (k-4)yz = 8 \qquad (1')$$

$$k(y-z)^2 + (k-1)yz = 1 \qquad (2')$$

$(1')$ ში გვაქვს $(k-4)yz \le 8$, საიდანაც ვღებულობთ $k \le 4$. მართლაც, თუ $k > 4$, მაშინ $1 \le (k-4)yz \le 8$, და ამიტომ $y \le 8$ და $z \le 8$. ეს კი შეუძლებელია, რადგანაც $y + z = 503 \cdot k \ge 503$. ასევე შევნიშნოთ (1) განტოლებიდან, რომ $y^3 + z^3$ არის ლუწი. ამიტომ $y + z = 503 \cdot k$ ლუწია, რაც ნიშნავს k-ს ლუწობას. ამრიგად, $k = 2$ ან $k = 4$. ცხადია, $(1')$ -ს არ აქვს მთელი ამონახსნი, როცა $k = 4$. თუ $k = 2$, მაშინ $(1')$ მიიღებს სახეს $(y+z)^2 - 5yz = 4$. რადგანაც $y + z = 503 \cdot k = 503 \cdot 2$, გვექნება $5yz = 503^2 \cdot 2^2 - 4$. მაგრამ $503^2 \cdot 2^2 - 4$ არ არის 5 -ის ჯერადი. ამიტომ $(1')$ განტოლებას არ აქვს მთელი ამონახსნი.

$(2')$ განტოლებიდან გვაქვს $0 \le (k-1)yz \le 1$, ანუ $k = 1$ ან $k = 2$. ასევე, $0 \le k(y-z)^2 \le 1$, და ამრიგად, $k = 2$ მხოლოდ მაშინ, როცა $y = z$. ვღებულობთ $y = z = 1$, რაც ეწინააღმდეგება უტოლობას $y + z \ge 503$. ამრიგად დაგვრჩა შემთხვევა, როცა $k = 1$. ამ შემთხვევაში $y + z = 503$,

ხოლო $(2')$ მიიღებს სახეს $(y-z)^2=1$ საიდანაც $z \geq y$-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ $z-y=1$. რაც გვაძლევს $y=251$ და z= 252. ამრიგად ვღებულობთ ერთადერთ სამეულს $(2, 251,252)$, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

პასუხი : $(2, 251,252)$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ x შეიძლება იყოს 1 ან 2 ;

ბ) მიიღო (1) და (2) განტოლებები და დაადგინა, რომ $503|(y+z)$;

გ) განტოლება $(1')$-ში აჩვენა, რომ k შეიძლება იყოს მხოლოდ 2 ან 4;

დ) აჩვენა, რომ $(1')$ განტოლებას არ აქვს მთელი ამონახსნი;

ე) დაადგინა, რომ $(2')$ განტოლებაში k შეიძლება იყოს მხოლოდ 1 ან 2;

ვ) $(2')$ განტოლებაში გამორიცხა შემთხვევა, როცა $k=2$, და მიიღო პასუხი;

შეფასების სქემა

1ქ – ა)

3ქ –ა), ბ)

4ქ – ა), ბ), გ) ან ა), ბ), ე) ან ა), ბ), გ), ე)

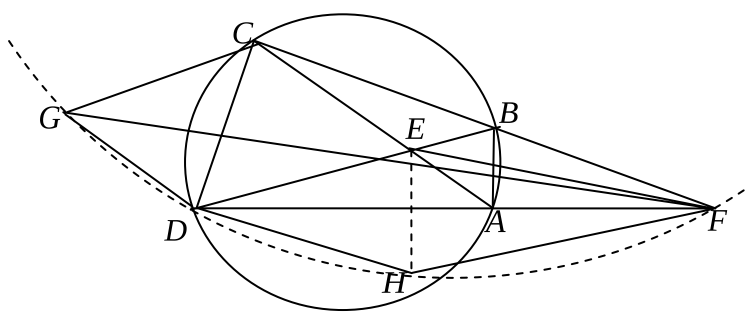
5ქ – ა), ბ), გ), დ)

6ქ – ა), ბ), გ), დ), ე)

7ქ – ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

2. ვთქვათ $ABCD$ არის წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედი. AC და BD დიაგონალები იკვეთება E წერტილში. AD გვერდის გაგრძელება A წერტილის მხარეს და BC გვერდის გაგრძელება B წერტილის მხარეს იკვეთება F წერტილში. ვთქვათ G ისეთი წერტილია, რომ $ECGD$ არის პარალელოგრამი, ხოლო H წერტილი არის E წერტილის ანასახი ღერძული სიმეტრიით AD ღერძის მიმართ. დაამტკიცეთ, რომ D, H, F და G წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს.

ამოხსნა



ცხადია, რომ ΔEAB მსგავსია ΔEDC –ის, ასევე ΔFAB მსგავსია ΔFCD–ის. თუ ასევე გავითვალისწინებთ, რომ $ECGD$ არის პარალელოგრამი, მივიღებთ:

$$\frac{GD}{EB} = \frac{CE}{EB} = \frac{CD}{AB} = \frac{FD}{FB}.$$

ამავე დროს $\angle FDG = \angle FDC + \angle CDG = \angle FBA + \angle DCE = \angle FBA + \angle ABE = \angle FBE$.

ამრიგად ორ–ორი გვერდის პროპორციულობისა და მათ შორის მდებარე კუთხეების ტოლობის გამო FDG სამკუთხედი მსგავსია FBE სამკუთხედის. ამიტომ მივიღებთ, რომ $\angle FGD = \angle FEB$.

რადგან H წერტილი არის E წერტილის ანასახი ღერძული სიმეტრიით FD ღერძის მიმართ, ამიტომ $\angle FHD = \angle FED = 180^\circ - \angle FEB = 180^\circ - \angle FGD$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ D, H, F და G წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს.

ამოხსნის ეტაპები

ა) აღნიშნა, რომ ΔEAB მსგავსია ΔEDC –ის და ΔFAB მსგავსია ΔFCD–ის;

ბ) დაადგინა, რომ $\frac{GD}{EB}=\frac{FD}{FB}$;

გ) დაადგინა, რომ $\angle CDG=\angle ABE$;

დ) დაადგინა, რომ $\angle FDG=\angle FBE$;

ე) დაადგინა, რომ FDG სამკუთხედი მსგავსია FBE სამკუთხედის;

ვ) დაადგინა, რომ $\angle FHD=180^{\circ}-\angle FGD$

ზ) დაადგინა, რომ D, H, F და G წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა) , ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

3. იპოვეთ ყველა ისეთი $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ ფუნქცია, რომლისთვისაც ტოლობა $f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$ სრულდება ყოველი x, y და z რაციონალური რიცხვებისთვის.

($\mathbb{Q}$ აღნიშნავს რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს.)

ამოხსნა

ჩავსვათ $f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$ განტოლებაში $x=0$ და $z=0$. მივიღებთ:

$f(f(y+f(0)))=y+f(0)$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $f(f(r))=r$ ყოველი r რაციონალური რიცხვისათვის. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ f არის ბიექციური, ანუ ურთიერთცალსახა ფუნქცია.

ვთქვათ $f(0)=a$. მაშინ $f(a)=0$. ამავე დროს $f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$ განტოლების მარჯვენა მხარე სიმეტრიულია x და z ცვლადების მიმართ, ამიტომ

$f(x+f(y+f(z)))=f(z+f(y+f(x)))$, საიდანაც f –ის ბიექციურობის გამო ვიღებთ $x+f(y+f(z))=z+f(y+f(x))$. მიღებულ განტოლებაში ჩავსვათ z –ის ადგილას $f(z)$, მაშინ მივიღებთ: $f(y+z)=f(z)+f(y+f(x))-x$. მიღებულში ჩავსვათ $x=a=f(0)$. მაშინ $f(y+z)=f(z)+f(y)-a$, ანუ

$$f(y+z)-a=f(z)-a+f(y)-a,$$

მაშინ ვიღებთ, რომ $g(x)=f(x)-a$ ფუნქციას აქვს ადიციურობის თვისება რაციონალური რიცხვებისთვის, ანუ $g(x+y)=g(x)+g(y)$ ტოლობა სრულდება ყოველი x, y რაციონალური რიცხვებისთვის. ეს კი გვაძლევს, რომ $g(x)=xg(1)=rx$, სადაც r და x რაციონალური რიცხვებია. ამრიგად $f(x)=rx+a$. მიღებული ფუნქციის თავდაპირველ განტოლებაში შემოწმება გვაძლევს საბოლოო ამონახსნებს: $f(x)=x$ ან $f(x)=-x+a$, $a\in\mathbb{Q}$.

პასუხი: $f(x)=x$ ან $f(x)=-x+a$, $a\in\mathbb{Q}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $f(f(r)) = r$;

ბ) დაადგინა, რომ f არის ბიექციური ფუნქცია;

გ) დაადგინა, რომ $x + f(y + f(z)) = z + f(y + f(x))$;

დ) დაადგინა, რომ $f(y+z) = f(z) + f(y) - a$

ე) დაადგინა, რომ $g(x) = f(x) - a$ ფუნქციას აქვს ადიციურობის თვისება;

ვ) დაადგინა, რომ $f(x) = rx + a$;

ზ) დაადგინა, რომ $f(x) = x$ ან $f(x) = -x + a$, $a \in \mathbb{Q}$.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა) , ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

4. რიგში წერია რამდენიმე მთელი დადებითი რიცხვი. ყოველ სვლაზე ამ რიცხვებიდან ირჩევენ ისეთ ორ a და b რიცხვს, რომ $a > b$ და a იმყოფება b-ს მარცხნივ, და ცვლიან (a, b) წყვილს ან $(b+1, a)$ ან $(a-1, a)$ წყვილით (ანუ a-ს ადგილას a-ს ნაცვლად წერენ $b+1$-ს ან $a-1$-ს, ხოლო b-ს ადგილას b-ს ნაცვლად წერენ a-ს). დაამტკიცეთ, რომ სვლათა ეს პროცესი ვერ გაგრძელდება უსასრულოდ.

ამოხსნა

შევნიშნოთ, რომ ამოცანის პირობაში აღწერილი სვლით, არ ცვლება მოცემული რიცხვების მაქსიმუმი, აღვნიშნოთ იგი M-ით. ვთქვათ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ არიან სვლათა რაღაც ეტაპზე მიღებული რიცხვები. განვიხილოთ სიდიდე $S = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი სვლის შემდეგ S იზრდება მთელი დადებითი რიცხვით. მართლაც, ვთქვათ ვცვლით (a_i, a_j) წყვილს (c, a_i) წყვილით, სადაც $a_i > a_j$ და $c = a_j + 1$ ან $c = a_i - 1$. მაშინ S -ის ახალი და ძველი მნიშვნელობები განსხვავდება შემდეგი სიდიდით

$$d = ic + ja_i - ia_i - ja_j = j(a_i - a_j) + i(c - a_i) \geq (i+1)(a_i - a_j) + i(c - a_i) = a_i - a_j + i(c - a_j).$$

ვინაიდან $a_i - a_j \geq 1$, ხოლო $c - a_j \geq 0$, ამიტომ d მთელი დადებითი რიცხვია.

ამრიგად ყოველი სვლის შემდეგ S იზრდება მთელი დადებითი რიცხვით. მეორე მხრივ, $S = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n \leq (1 + 2 + \cdots + n)M$ და რადგან იგი ყოველი სვლის შემდეგ იზრდება 1-ით მაინც, ამიტომ სასრული სვლის შემდეგ პროცესი გაჩერდება. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოხსნის ეტაპები

ა) შენიშნა, რომ მოცემული სვლით არ იცვლება რიცხვების მაქსიმუმი ;

ბ) მიხვდა S-ტიპის რიცხობრივი მახასიათებლის შემოღების საჭიროებას;

გ) აჩვენა, რომ ყოველი სვლის შემდეგ S იზრდება მთელი დადებითი რიცხვით;

დ) შეაფასა S ზემოდან და გ)-ს გამოყენებით დაასრულა დამტკიცება;

შეფასების სქემა

1ქ – ა)

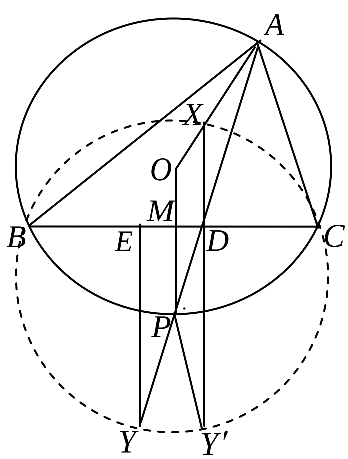
2ქ –ა), ბ)

5ქ – ა), ბ), გ)

7ქ – ა), ბ), გ), დ)

5. ABC სამკუთხედი, რომლისთვისაც $AB \neq AC$ ჩახაზულია O ცენტრის მქონე წრეწირში. BAC კუთხის ბისექტრისა BC გვერდს კვეთს D წერტილში. E წერტილი არის D წერტილის ანასახი ცენტრული სიმეტრიით BC გვერდის შუაწერტილის მიმართ. D წერტილზე BC გვერდის მართობულად გავლებული წრფე AO წრფეს კვეთს X წერტილში, ხოლო E წერტილზე BC გვერდის მართობულად გავლებული წრფე AD წრფეს კვეთს Y წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ $BXCY$ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი.

ამოხსნა



ცხადია, რომ BAC კუთხის ბისექტრისა და BC გვერდის შუამართობი იკვეთებიან წრეწირზე BC რკალის P შუაწერტილში. ვთქვათ OP კვეთს BC გვერდს M წერტილში. ცხადია, რომ M იქნება BC გვერდის შუაწერტილი.

ვთქვათ Y' არის Y წერტილის სიმეტრიული OP წრფის მიმართ. გვაქვს:

$\angle XAP = \angle OPA = \angle EYP = \angle DY'P = \angle XY'P$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $XAY'P$ ოთხკუთხედი არის ციკლური, ამიტომ $XD \cdot DY' = AD \cdot DP$. მეორე მხრივ

$AD \cdot DP = BD \cdot DC$. ამრიგად $XD \cdot DY' = BD \cdot DC$, რაც გვაძლევს, რომ $BXCY'$ ოთხკუთხედი არის ციკლური, ამიტომ ციკლური იქნება $BXCY$ ოთხკუთხედიც, ვინაიდან Y და Y' წერტილები სიმეტრიულია $BXCY'$ ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრზე გამავალი წრფის მიმართ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ BAC კუთხის ბისექტრისა და BC გვერდის შუამართობი იკვეთებიან წრეწირზე BC რკალის P შუაწერტილში;

ბ) განიხილა Y' წერტილი, რომელიც არის Y წერტილის სიმეტრიული OP წრფის მიმართ;

გ) დაადგინა, რომ $\angle XAP = \angle XY'P$

დ) დაადგინა, რომ $XAY'P$ ოთხკუთხედი არის ციკლური;

ე) დაადგინა, რომ $XD \cdot DY' = BD \cdot DC$;

ვ) დაადგინა, რომ $BXCY'$ ოთხკუთხედი არის ციკლური;

ზ) დაადგინა, რომ $BXCY$ ოთხკუთხედი არის ციკლური.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა) , ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

6. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვები m და n, რომ შესრულდეს $(m^2+n)(n^2+m)=2(m-n)^3$ ტოლობა.

ამოხსნა

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ანუ ვთქვათ არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვები m და n , რომ $(m^2+n)(n^2+m)=2(m-n)^3$. მაშინ გვექნება,

$$\frac{1}{4}((m^2+n+n^2+m)^2-(m^2+n-n^2-m)^2)=2(m-n)^3.$$

ვინაიდან $m^2+n-n^2-m=(m-n)(m+n-1)$, ამიტომ ზემოთ მიღებული ტოლობა გადაიწერება ასე $(m^2+n+n^2+m)^2=(m-n)^2(8(m-n)+(m+n-1)^2)$. აქედან ვღებულობთ, რომ $8(m-n)+(m+n-1)^2$ სრული კვადრატია და რადგანაც $m>n$ -ზე, ამიტომ არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი $s\geq 1$, რომ $(m+n-1+2s)^2=8(m-n)+(m+n-1)^2$. გადავწეროთ ეს ტოლობა შემდეგნაირად $s(m+n-1+s)=2(m-n)$. ვინაიდან $m+n-1+s>m-n$, ამიტომ $s<2$. ანუ ვღებულობთ, რომ $s=1$ და $m=3n$, რაც შეუძლებელია, ვინაიდან ამოცანის პირობაში მოცემული ტოლობის მარცხენა მხარე მეტია $m^3=27n^3$-ზე, ხოლო მარჯვენა მხარე უდრის $16n^3$. ამრიგად, ჩვენი დაშვება, რომ არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვები m და n , რომ $(m^2+n)(n^2+m)=2(m-n)^3$ ყოფილა მცდარი. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გადაწერა ტოლობა შემდეგნაირად: $\frac{1}{4}((m^2+n+n^2+m)^2-(m^2+n-n^2-m)^2)=2(m-n)^3$;

ბ) მიიღო გამოსახულება $(m^2+n+n^2+m)^2=(m-n)^2(8(m-n)+(m+n-1)^2)$, საიდანაც შენიშნა, რომ $8(m-n)+(m+n-1)^2$ სრული კვადრატია;

გ) წარმოადგინა $8(m-n)+(m+n-1)^2$ გამოსახულება $(m+n-1+2s)^2$ სახით, სადაც $s\geq 1$;

დ) მიიღო ტოლობა $s(m+n-1+s)=2(m-n)$, საიდანაც აჩვენა, რომ $s<2$ და $m=3n$;

ე) როცა $m=3n$ შეაფასა ამოცანაში მოცემული ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეები და მიიღო წინააღმდეგობა;

შეფასების სქემა

1ქ – ა)

3ქ –ა), ბ)

5ქ – ა), ბ), გ)

6ქ – ა), ბ), გ), დ)

7ქ – ა), ბ), გ), დ), ე)